FACIT

Några uppgifter om kvotregeln och $y = ln\ (x)$

1. Bestäm utan miniräknare värdet av nedanstående uttryck

a) $\ln(e) - \ln(1)$

$\ln e = 1 \quad \ln 1 = 0$

$1 - 0 = 1$

b) $f'(e)$ om $f(x) = x \cdot \ln(x)$

$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

$f'(e) = \ln(e) + 1 = 1 + 1 = 2$

c) $f'(1)$ om $f(x) = e \cdot \ln(x^3)$

$f'(x) = e \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3ex^2}{x^3} = \frac{3e}{x}$

$f'(1) = 3e$

2. Derivera funktionerna nedan

a) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

b) $g(x) = \frac{\sin(3x)}{\ln(x)}$

$$g'(x) = \frac{3\cos(3x) \cdot \ln(x) - \sin(3x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

3. Visa att derivatan av $y = \tan(x)$ kan skrivas som...

a) $y' = \tan^2(x) + 1$

b) $y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$y' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}$$

b) [Trig. ettan]

$$\frac{1}{\cos^2(x)}$$

a) [Skriv som två bråk]

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$$

4. Vera Kvoth har fått i uppgift att bestämma derivatan av en kvot.

Hon kommer då fram till det korrekta svaret,

$$f'(x) = \frac{-4x(4-x^2)\ln(x) - \frac{(4-x^2)^2}{x}}{(\ln(x))^2}$$

a) Vilken är kvoten som Vera har deriverat?

Identifiera täljare och nämnare $\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{(4-x^2)^2}{\ln(x)}$

b) Vera försöker beräkna värdet av $f'(1)$, men får bara "ERROR".
Förklara för Vera varför.

Det innebär division med noll, eftersom $\ln(1) = 0$.

5. Derivera funktionen $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ genom att…

a) använda "upphöjt till minus 1"-omskrivning och använda kedjeregeln

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = f(x)^{-1} \Rightarrow g'(x) = -1 \cdot f(x)^{-2} \cdot f'(x)$

$= -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$

b) använda kvotregeln

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ $\quad g'(x) = \dfrac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{(f(x))^2} = \dfrac{-f'(x)}{f(x)^2}$

6. Bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(6+h) - \ln(6)}{h}$ ← Gränsvärden av typen $h \to 0$ kan oftast tolkas som ett derivatavärde.

= "Derivatan av $y = \ln(x)$ där $x = 6$"

$y' = \dfrac{1}{x}$ $\quad y'(6) = \dfrac{1}{6}$

7. Bestäm $f''(x)$ om $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot e^{x^2} - x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \dfrac{e^{x^2}(1-2x^2)}{(e^{x^2})^2} = \dfrac{1-2x^2}{e^{x^2}}$

$f''(x) = \dfrac{-4x \cdot e^{x^2} - (1-2x^2) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \dfrac{-4x - 2x(1-2x^2)}{e^{x^2}}$